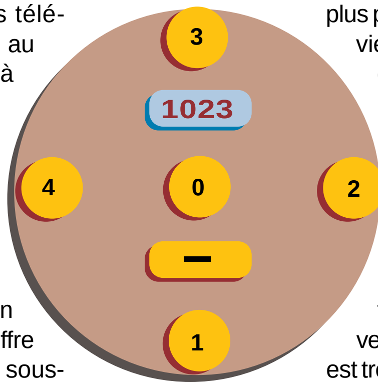
JEU-CONCOURS N° 51

PIERRE TOUGNE

Jeu de soustraction

Considérez le jeu à deux sur une calculatrice en base 5 ayant les particularités suivantes : ses chiffres, différents de zéro, sont répartis sur un cercle (comme sur les anciens cadrans téléphoniques). Le zéro, au centre, ne sert qu'à entrer le nombre de départ. Le cadran comporte un écran d'affichage et une touche de soustraction *(voir la figure)*. On affiche un nombre, et chaque joueur à son tour appuie sur un chiffre autre que zéro, qu'il soustrait au nombre affiché en appuyant sur la touche «moins». Pour le premier coup, le choix du chiffre est libre, mais aux coups suivants, le joueur ne peut choisir que le même chiffre ou ses deux plus proches voisins sur le clavier circulaire (ainsi, si 3 a été joué, le joueur suivant ne peut jouer que 2, 3 ou 4 ; pour 1, c'est 1, 2 ou 4, etc.). Le joueur affichant un résultat négatif (0 étant considéré comme positif) est le perdant. Si vous pratiquez un peu ce jeu, vous verrez que le premier joueur est très avantagé. Cependant, il existe des nombres de départ toujours perdants pour le premier joueur, à condition que le deuxième joueur joue parfaitement. Quels sont ces nombres pour le jeu normal et le jeu «à qui perd gagne» (c'est-à-dire que le joueur obtenant un résultat négatif est le gagnant)? Que deviennent ces réponses sur une calculatrice en base 6? Les lecteurs les plus courageux pourront s'attaquer hors-concours aux bases plus grandes.



Envoyez vos réponses aux questions sur carte postale à *Pour la Science*, **8, rue Férou, 75006 Paris. Parmi les réponses exactes reçues pendant le mois de septembre 1998, dix gagnants tirés au sort recevront un livre.**

RÉPONSE AU JEU-CONCOURS N° 49

Désignons par *a* et *b* les deux distances différentes : on a trois cas possibles pour les six distances (5*a*, 1*b*) (4*a*, 2*b*) et (3*a*, 3*b*).

Cas (5, 1)

Soit *A* et *D* les extrémités du segment de longueur *b* : on a alors *AB* = *AC* = *BC* = *BD* = *CD* = *a*, c'est-à-dire que les triangles *ABC* et *BCD* sont équilatéraux et symétriques par rapport à *BC*, d'où la figure 1*a*.

Cas (4, 2)

Deux cas sont à considérer : *(1)* les deux segments de longueur *b* ont un sommet commun, désignons-les par *AB*, *AC*. Alors, *AD* = *DB* = *BC* = *CD* = *a*, c'est-à-dire que le triangle *BCD* est équilatéral et que *A* est situé sur la médiatrice de *BC*, d'où les deux solutions des figures 2*a* et 2*b*. *(2)* Les deux segments de longueur *b* n'ont pas d'extrémités communes, soit *AB* et *CD* ces segments. Alors, *AC* = *CB* = *BD* = *DA* = *a*, donc *ABCD* est un losange dont, en plus, les diagonales sont égales, c'est-à-dire un carré *(voir la figure 2c)*.

Cas (3, 3)

Avec quatre points, trois segments égaux ne peuvent être constitués que d'un triangle équilatéral, trois segments ayant un sommet commun ou, enfin, trois segments bout à bout. Les deux premiers cas conduisent au même polygone de la figure 3*a*, tandis que le troisième a pour solution le polygone de la figure 3*b* (bien moins évident), où *AB*, *BC* et *CD* sont les côtés d'un pentagone régulier.

Dans le cas de trois distances différentes, les possibilités sont beaucoup plus nombreuses, et seuls les résultats sont indiqués sur les figures 4*a* et 4*b* pour le cas (4, 1, 1), sur les figures 5*a*, 5*b*, 5*c*, 5*d* et 5*e* pour le cas (3, 2, 1) et sur les figures 6*a*, 6*b* et 6*c* pour le cas (2, 2, 2). Les segments de la même longueur sont de la même couleur et le nombre à côté de certains polygones correspond au nombre de variantes selon la position du point *D* par rapport au triangle *ABC*. Cela fait en tout 20 «familles différentes» qui se ramènent à 12 si l'on ne considère que les polygones convexes.